ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 4

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique, noté $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto (\vec{u} \mid \vec{v})$; la norme euclidienne associée est notée $\vec{u} \mapsto \| \vec{u} \|$. On munit $\mathbb{R}^2$ de l'orientation définie par la base orthonormale canonique $(\vec{i}, \vec{j})$. On rappelle qu'une similitude directe s de $\mathbb{R}^2$ de centre O s'écrit sous la forme $s = \rho\, r$, où ρ est un nombre réel strictement positif et où r est une rotation ; ρ est le rapport de s et l'angle θ de r est l'angle de s.

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et on identifie le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ par l'isomorphisme canonique $\vec{u} = (x, y) \mapsto z = x + iy$. Dans ces conditions, $\| \vec{u} \| = |z|$ et la base $(\vec{i}, \vec{j})$ s'identifie à la base $(1, i)$. Les similitudes directes de $\mathbb{R}^2$ de centre O sont les transformations $h \mapsto ch$, où c est un nombre complexe non nul.

Étant donné un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ et une application f de U dans $\mathbb{C}$, on dit que f est dérivable en un point z de U s'il existe un nombre complexe c tel que, au voisinage de 0,

$$f(z + h) = f(z) + ch + \varepsilon(h)\, h, \qquad \text{où} \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0. \tag{1}$$

Le nombre c est alors unique et se note $f'(z)$.

On note A (U) le sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur U à valeurs complexes constitué des fonctions f dérivables sur U et dont la dérivée f' est continue sur U.

On note C^1 (U) l'espace vectoriel des applications F de U dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 sur U, considéré comme ouvert de $\mathbb{R}^2$. On désigne par Conf (U) la partie de C^1 (U) constituée des applications F conformes sur U, c'est-à-dire injectives et telles qu'en tout point (x, y) de U, la différentielle $dF(x, y)$ de F au point (x, y) soit une similitude directe de $\mathbb{R}^2$.

Enfin, on note H (U) l'espace vectoriel des fonctions φ à valeurs réelles de classe C^2 sur U, considéré comme ouvert de $\mathbb{R}^2$, et harmoniques sur U, c'est-à-dire solutions sur U de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Dans la partie I, on établit des relations entre A (U) et Conf (U). À cet effet, étant donnée une application f de U dans $\mathbb{C}$, on note P et Q les fonctions à valeurs réelles définies sur U par :

$$f(x + iy) = P(x, y) + i\, Q(x, y), \tag{3}$$

et on note F l'application de U dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $(P(x, y), Q(x, y))$.

Dans la partie II, on applique les résultats obtenus à l'étude de l'écoulement d'un fluide autour d'un objet dans le plan, ce qui conduit à déterminer les fonctions harmoniques sur l'ouvert U complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ de cet objet et à étudier leurs lignes de niveau.

I. ÉTUDE DE A (U) ET Conf (U)

1. *Caractérisation des applications $\mathbb{R}$-linéaires, $\mathbb{C}$-linéaires.*

Soient f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et F l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à f.

a. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- l'application f est $\mathbb{R}$-linéaire ;
- l'application f est de la forme $f(x + iy) = \lambda x + \mu y$, où λ et μ sont des nombres complexes ;
- l'application f est de la forme $f(z) = cz + d\overline{z}$, où c et d sont des nombres complexes.

b. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- l'application f est $\mathbb{C}$-linéaire ;
- l'application f est de la forme $f(z) = cz$, où c est un nombre complexe ;
- l'application F est $\mathbb{R}$-linéaire et sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme

(4) $$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

Montrer que, dans ces conditions, $c = a + ib$.

2. ***Propriétés élémentaires des fonctions continûment dérivables sur*** U.

a. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui appartiennent à A (U) :

$$z \mapsto 1, \quad z \mapsto z, \quad z \mapsto x = \operatorname{Re} z, \quad z \mapsto \bar{z}.$$

b. Prouver que le produit fg de deux éléments f et g de A (U) appartient encore à A (U) et calculer sa dérivée.

c. Soit f un élément de A (U) ne s'annulant pas sur U. Prouver que $\frac{1}{f}$ appartient encore à A (U) et calculer sa dérivée.

d. Soient U et V des ouverts non vides de $\mathbb{C}$, f un élément de A (U) et g un élément de A (V) tels que $f(U) \subset V$. Établir que $g \circ f$ appartient à A (U) et calculer sa dérivée.

3. ***Caractérisation réelle des éléments de*** A (U).

Soit f une application de U dans $\mathbb{C}$, écrite sous la forme (3). Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

a. la fonction f appartient à A (U) ;

b. la fonction F est de classe C^1 sur U et, en tout point $z = x + iy$ de U, sa matrice jacobienne Jac F (x, y) est de la forme (4) ;

c. les fonctions P et Q sont de classe C^1 sur U et satisfont aux relations suivantes :

(5) $$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Montrer que, dans ces conditions,

$$f' = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

En déduire que f est de classe C^p sur U, où $p \geqslant 1$, si et seulement si P et Q le sont et satisfont aux relations (5).

Prouver que $\text{Det Jac F} = \|\overrightarrow{\text{grad}}\, P\|^2 = \|\overrightarrow{\text{grad}}\, Q\|^2 = |f'|^2$.

4. ***Caractérisation des similitudes de*** $\mathbb{R}^2$.

Soit s un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a. l'automorphisme s est une similitude, c'est-à-dire est de la forme $s = \rho r$, où ρ est un nombre réel strictement positif et r est un automorphisme orthogonal ;

b. il existe un nombre réel $\rho > 0$ tel que, pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$,

$$(s(\vec{u}) \mid s(\vec{v})) = \rho^2 (\vec{u} \mid \vec{v}) ;$$

c. il existe un nombre réel $\rho > 0$ tel que, pour tout élément $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\| s(\vec{u}) \| = \rho \| \vec{u} \| .$$

Prouver que ces conditions sont encore équivalentes aux suivantes :

d. pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$, la relation $\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \|$ implique la relation $\| s(\vec{u}) \| = \| s(\vec{v}) \|$;

e. pour tout couple $(\vec{a}, \vec{b})$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$, la relation $(\vec{a} \mid \vec{b}) = 0$ implique la relation $(s(\vec{a}) \mid s(\vec{b})) = 0$.

À cet effet, on prouvera que *c.* $\Leftrightarrow$ *d.* et que *d.* $\Leftrightarrow$ *e.* ; pour ce dernier point, on pourra s'appuyer sur la relation suivante :

$$(\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} - \vec{v}) = \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2 .$$

5. ***Caractérisation des éléments de*** Conf (U).

Soit f une application injective de U dans $\mathbb{C}$, écrite sous la forme (3).

a. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

- la fonction f appartient à A (U) et, en tout point z de U, $f'(z) \neq 0$;
- l'application F appartient à Conf (U).

b. Montrer que, dans ces conditions, V = F (U) est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que l'application réciproque $G = F^{-1}$ de F appartient à Conf (V). En déduire que l'application réciproque $g = f^{-1}$ de f appartient à A (V) et calculer sa dérivée.

6. ***Conservation des angles orientés par les éléments de*** Conf (U).

Soient F un élément de Conf (U), Γ_1 et Γ_2 deux arcs paramétrés de U définis par des applications $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, injectives et telles qu'en tout point t de I $\vec{\varphi}'_1(t) \neq \vec{0}$ et $\vec{\varphi}'_2(t) \neq \vec{0}$.

a. Prouver que les arcs $\Delta_1 = F(\Gamma_1)$ et $\Delta_2 = F(\Gamma_2)$ définis par $\vec{\psi}_1 = F \circ \vec{\varphi}_1$ et $\vec{\psi}_2 = F \circ \vec{\varphi}_2$ sont aussi réguliers à l'ordre 1.

b. Établir que les angles orientés $(\vec{\varphi}'_1(t), \vec{\varphi}'_2(t))$ et $(\vec{\psi}'_1(t), \vec{\psi}'_2(t))$ sont égaux.

II. ÉTUDE DES FONCTIONS HARMONIQUES

1. ***Caractérisation des fonctions harmoniques sur*** U.

a. Soit f un élément de A (U) de classe C^2 sur U, écrit sous la forme (3). Montrer que $P = \mathrm{Re}\, f$ est harmonique sur U.

b. On suppose que U est un ouvert <u>convexe</u> de $\mathbb{R}^2$ et on considère, réciproquement, un élément P de H (U).

Montrer que la forme différentielle $\omega = -\dfrac{\partial P}{\partial y}\, dx + \dfrac{\partial P}{\partial x}\, dy$ est exacte sur U. En déduire qu'il existe un élément f de A (U) de classe C^2 sur U tel que $\mathrm{Re}\, f = P$.

2. ***Propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques.***

Soit φ un élément de H (U), $a = (x, y)$ un point de U et $D_a(r)$ un disque fermé de centre a et de rayon $r > 0$ contenu dans U.

a. Soit h la fonction définie sur $[0, r]$ par :

$$h(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x + \rho \cos\theta, y + \rho \sin\theta)\, d\theta .$$

Prouver que h est de classe C^1 sur $[0, r]$ et calculer sa dérivée.

b. En déduire que :

$$\varphi(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_a(r)} \varphi(u, v)\, du\, dv. \tag{6}$$

Ainsi la valeur de φ en a est égale à la moyenne de φ sur le disque $D_a(r)$.

3. ***Principe du maximum.***

On suppose que l'ouvert U est connexe. Soit φ un élément de H (U). On suppose qu'il existe un point a de U tel que, pour tout point w de U, $\varphi(w) \leqslant \varphi(a)$.

a. Soit B la partie de U constituée des points w tels que $\varphi(w) = \varphi(a)$. À l'aide de (6), prouver que B est ouverte dans U.

b. En déduire que φ est constante sur U.

4. ***Application aux fonctions harmoniques sur le demi-plan.***

Soit Π le demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$ constitué des points (x, y) tels que $y > 0$ et $\overline{\Pi}$ le demi-plan fermé $y \geqslant 0$.

a. Soit φ une fonction continue sur $\overline{\Pi}$, harmonique sur Π et satisfaisant aux conditions suivantes : pour tout point $(u, 0)$ de l'axe réel, $\varphi(u, 0) = 0$, et φ tend vers 0 à l'infini, c'est-à-dire que $\varphi(x, y)$ tend vers 0 lorsque $\|(x, y)\| \longrightarrow +\infty$. Prouver que $\varphi = 0$.

b. Soit ψ une fonction continue sur $\overline{\Pi}$, de classe C^∞ sur Π, harmonique sur Π et satisfaisant aux conditions suivantes : en tout point $(u, 0)$ de l'axe réel, la limite de $\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi$ en ce point est nulle, et $\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi$ tend vers $\vec{0}$ à l'infini. Prouver que ψ est constante.

c. Déterminer toutes les fonctions χ continues sur $\overline{\Pi}$, de classe C^∞ sur Π, harmoniques sur Π et satisfaisant aux conditions suivantes : en tout point $(u, 0)$ de l'axe réel, la limite de $\overrightarrow{\text{grad}}\,\chi$ en ce point est égale à α, ou α est un nombre réel positif donné, et $\overrightarrow{\text{grad}}\,\chi$ tend vers α à l'infini. Déterminer les lignes de niveau de χ.

5. ***Effet d'une transformation conforme.***

Soient F un élément de Conf U de classe C^∞ sur U et $V = F(U)$. Montrer que l'application $\psi \longmapsto \varphi = \psi \circ F$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel H (V) sur l'espace vectoriel H (U).

6. ***La transformation de Joukovski.***

Soit r un nombre réel strictement positif. On note E_r le complémentaire du disque fermé $D_0(r)$, U_r l'ouvert $E_r \cap \Pi$ et $\overline{U}_r$ l'adhérence de U_r. On note F l'application de $\overline{U}_r$ dans $\mathbb{C}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$) associée à la fonction f définie par :

$$f(z) = z + \frac{r^2}{z} \quad \text{(transformation de Joukovski).}$$

a. Exprimer les coordonnées X et Y de $f(z)$ en fonction des coordonnées x et y de z.

b. Établir que l'image par F du demi-cercle Γ_r de centre O et de rayon r situé dans $\overline{\Pi}$ est le segment $[-2r, 2r]$ de l'axe réel. En déduire l'image par F de la frontière de U_r.

c. Établir que F définit une bijection de U_r sur Π, et que F est élément de Conf (U_r) de classe C^∞ sur U_r.

d. Prouver que, sur $\overline{U}_r$, $f(z)$ tend vers l'infini si et seulement si z tend vers l'infini, c'est-à-dire si $|z|$ tend vers $+\infty$.

e. Montrer que F est un homéomorphisme de $\overline{U}_r$ sur $\overline{\Pi}$.

7. ***Application aux fonctions harmoniques sur*** U_r.

a. En utilisant les résultats des questions 4, 5 et 6, déterminer une fonction φ continue sur $\overline{U}_r$, de classe C^∞ sur U_r, harmonique sur U_r et satisfaisant aux conditions suivantes : pour tout point (u, v) de la frontière de U_r, $\varphi(u, v) = 0$ et la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) - \alpha y$ tend vers 0 à l'infini, où $\alpha > 0$ est donné.

b. Prouver que φ est la seule fonction satisfaisant aux conditions du *a.*

c. Représenter graphiquement l'ensemble L constitué des points (x, y) de $\overline{U}_r$ tels que $\varphi(x, y) = \frac{1}{2} r\alpha$.